DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

SI DICONO DISEQUAZIONI LOGARITMICHE QUELLE DISEQUAZIONI IN CUI L'INCOGNITA FIGURA NELL'ARGOMENTO DI UNO O PIÙ LOGARITMI.

COME PER LE EQUAZIONI LOGARITMICHE, BISOGNA TENER PRESENTE IL DOMINIO DELLA DISEQUAZIONE, CIOÈ CHE I LOGARITMI IN ESSE PRESENTI SONO DEFINITI SOLO PER ARGOMENTI POSITIVI.

SI CHIAMA FORMA CANONICA DELLE DISEQUAZIONI LOGARITMICHE LA DISEGUAGLIANZA:

$$\boxed{\log_a f(x) \geq \log_a g(x)} \quad \text{OPPURE} \quad \boxed{\log_a f(x) \leq \log_a g(x)}$$

DOVE $a > 0$ E $a \neq 1$

ED $f(x)$ E $g(x)$ SONO ESPRESSIONI IN "X", CHE È UN NUMERO REALE QUALSIASI, TALI CHE

$$\boxed{f(x) > 0} \quad \text{E} \quad \boxed{g(x) > 0}$$

PER LA "MONOTONIA" DELLA FUNZIONE LOGARITMO SI AVRÀ

$$\boxed{f(x) \geq g(x)} \quad \text{OPPURE} \quad \boxed{f(x) \leq g(x)}$$

SE LA BASE DEL LOGARITMO È MAGGIORE DI 1, $a > 1$ (CIOÈ SI MANTIENE IL VERSO DELLA DISEQUAZIONE).

MENTRE INVECE SI AVRÀ

$$\boxed{f(x) \leq g(x)} \quad \text{OPPURE} \quad \boxed{f(x) \geq g(x)}$$

SE $0 < a < 1$ (CIOÈ SI INVERTE IL VERSO DELLA DISEQUAZIONE).

DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

ESEMPI

1) RISOLVERE LA DISEQUAZIONE

$$\log_2 (x-1) < 1 \Rightarrow C.A.\ x-1>0 \Rightarrow x>1$$

MEDIANTE LA DEFINIZIONE DI LOGARITMO, ABBIAMO.

$$\log_2 (x-1) < \log_2 2$$

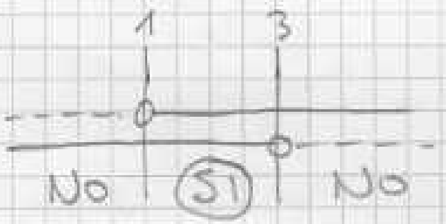
VISTO CHE LA BASE DEL LOGARITMO È $2>1$, ALLORA SI MANTIENE IL VERSO, CIOÈ:

$$(x-1) < 2$$

$$x<3$$

A QUESTO PUNTO METTENDO A SISTEMA LE SOLUZIONI DEL DOMINIO (C.A. = CONDIZIONI DI ACCETTABILITÀ) E LE SOLUZIONI DELLA DISEQUAZIONE:

$$\begin{cases} x>1 \\ x<3 \end{cases}$$



LE SOLUZIONI ACCETTABILI SONO:

$$\boxed{1<x<3}$$

2) $\log_2 x > 3 \Rightarrow C.A.\ x>0$

$$\log_2 x > 3 \cdot 1$$

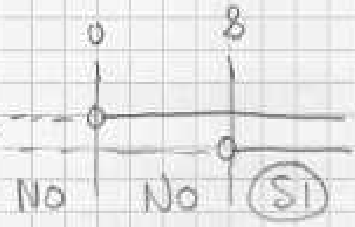
$$\log_2 x > 3 \cdot \log_2 2$$

$$\log_2 x > \log_2 2^3$$

$$x > 8$$

CIOÈ

$$\begin{cases} x > 0 \\ x > 8 \end{cases} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \boxed{x > 8}$$

$\boxed{3)}$ $\log_3 x + \log_3 (x-8) \geq 2$

C.A.

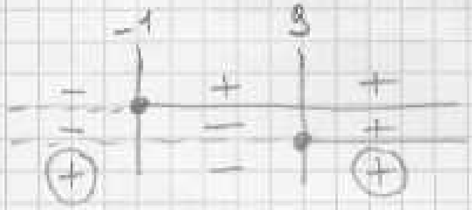
$$\begin{cases} x > 0 \\ x-8 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x > 8 \end{cases} \Rightarrow x > 8$$

QUINDI

$$\log_3 [x(x-8)] \geq \log_3 3^2$$

$$x(x-8) \geq 9$$

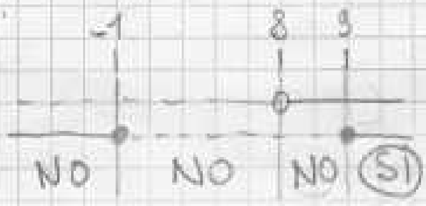
$$x^2 - 8x - 9 \geq 0 \qquad \Delta = 100 \qquad x_{1,2} = \frac{8 \pm 10}{2} = \begin{cases} \frac{-2}{2} = -1 \\ \frac{18}{2} = 9 \end{cases}$$



$$\Rightarrow x \leq -1 \ \vee \ x \geq 9$$

IN DEFINITIVA:

$$\begin{cases} x > 8 \\ -1 \leq x \leq 9 \end{cases} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \boxed{x \geq 9}$$

DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

4) $\log_5 x \leq 0$ C.A. $x>0$

DALLE PROPRIETÀ DEI LOGARITMI SAPPIAMO CHE:

$$5^{\log_5 x} = x$$

QUINDI RISCRIVIAMO LA DISEQUAZIONE COME FORMA CANONICA DI UNA DISEQUAZIONE ESPONENZIALE DI BASE 5, CIOÈ:

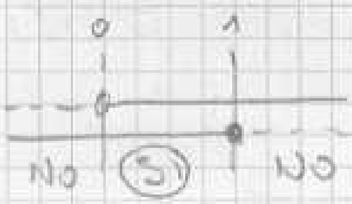
$$5^{\log_5 x} \leq 5^0$$

CIOÈ

$$x \leq 1$$

QUINDI:

$$\begin{cases} x>0 \\ x\leq 1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \boxed{0<x\leq 1}$$

N.B.

LO STESSO RAGIONAMENTO SI POTEVA FARE GRAFICAMENTE SULLA CURVA LOGARITMICA, PERCHÉ SE LA BASE È MAGGIORE DI 1, LA CURVA È NEGATIVA (≤ 0) QUANDO L'ARGOMENTO DEL LOGARITMO È COMPRESO TRA 0 ED 1.

5) $\text{Log}(x^2-4x+4) \leq 0$

$$\begin{cases} x^2-4x+4>0 \\ x^2-4x+4\leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2>0 \\ x^2-4x+3\leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ 1\leq x\leq 3 \end{cases}$$

E LE SOLUZIONI ACCETTABILI SONO:

$$\boxed{1\leq x<2} \vee \boxed{2<x\leq 3}$$